Vorlesung (7), 17.06.2022

⌈ Wh.: $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$; $p = 0$ ist Gl.-lage des linearen Systems

$$\dot{x} = Ax \quad \text{auf } \mathbb{R}^n$$

Wann ist $p = 0$ (asymptotisch) stabil?

Schon gesehen: p +-stabil $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$, für alle $\alpha \in \mathrm{sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist EW von } A\}$.

Argument: Wähle EV $z_0 \in \mathbb{C}^n$ von α, $Az = \alpha z$ → Lös.g von $\dot{z} = Az$ auf $\mathbb{C}^n$ zum AW z_0 ist

$$z(t) = e^{\alpha t} z_0$$

Ist

$$\alpha = \lambda + i\mu, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

so ist

$$\|z(t)\| = \|e^{\alpha t} z_0\| = |e^{\alpha t}| \cdot \|z_0\|$$
$$= |e^{(\lambda + i\mu)\cdot t}| \cdot \|z_0\| = \underbrace{|e^{\lambda t}|}_{>0} \cdot \underbrace{|e^{i\mu t}|}_{=1} \cdot \|z_0\|$$
$$= e^{\lambda t} \cdot \|z_0\|.$$

$\lrcorner$

Kommentar. (a) Auch die Eigenschaft ein Attraktor zu sein, braucht man nur auf einer Basis zu prüfen: $p = 0$ ist Attraktor, falls p stabil ist und

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(e_j) = 0 \;, \; j = 1, \dots, n,$$

auf einer Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$.

(b) Auch kann man daher wieder deshalb auch

$$\dot{z} = Az \quad \text{auf } \mathbb{C}^n$$

auf seine Attraktivität prüfen. Mit obigem Argument ist deshalb klar:

<u>Satz</u>. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ mit Eigenwerten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Ist $p = 0$ ein Attraktor von $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, so gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$\mathrm{Re}(\alpha_j) < 0 .$$

<u>Frage</u>: Gelten auch die Umkehrungen?

<u>Erinnerung</u>. (a) <u>Lemma von Gronwall</u> (vereinfachte Version). Sei $u : [0, T) \to [0, \infty)$ eine

differenzierbare Funktion. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, so dass für alle $t \in [0,T)$ gilt:

$$\alpha u(t) \leq \dot{u}(t) \leq \beta \cdot u(t).$$

Dann gilt für alle $t \in [0,T)$:

$$u(0)\, e^{\alpha t} \leq u(t) \leq u(0)\, e^{\beta t}$$

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t} \cdot u\right)(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{>0}\left(\underbrace{-\beta u + \dot{u}}_{\leq 0}\right)(t) \leq 0.$$

Also ist $t \mapsto e^{-\beta t} u(t)$ monoton fallend, insbesondere

$$e^{-\beta t} u(t) \leq e^{-\beta \cdot 0} \cdot u(0) = u(0) \quad , \forall t \in [0,T)$$

also

$$u(t) \leq u(0) e^{\beta t} .$$

Ähnlich:

$$u(t) \geq u(0) e^{\alpha t}, \forall t \in [0,T).$$

$\boxtimes$

(b) Führt man die komplexe Matrizen-Exponentialfunktion

$$\exp : \mathrm{Mat}_n \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{C}$$

durch

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

ein, so erhält man:

(i) mit Hilfe der Operatornorm

$$\| \cdot \| : \mathrm{Mat}_n \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty),$$

$$\|A\| := \sup \{ \|Az\| \in [0,\infty) : \|z\| = 1 \} < \infty$$

(weil $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ kompakt ist, und $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ bezeichne):

- $\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$

- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{C}$

- wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|} < \infty$$

konvergiert $\exp(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{C}$ absolut (und auf Kompakta gleichmäßig).

(ii) I.a. gilt zwar nicht

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B,$$

wohl aber, wenn A und B kommutieren, d.h

$$[A,B] := AB - BA = 0.$$

Deshalb sieht man aus

$$e^{(t+h)A} = e^{tA+hA} = e^{tA} \cdot e^{hA},$$

da

$$[tA, hA] = th\,[A, A] = 0$$

ist, schnell, dass

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A\,e^{tA} = e^{tA} \cdot A$$

ist, und daher das dynamische System (φ^t) zu

$$\dot z = Az \quad \text{auf } \mathbb{C}^n$$

gegeben ist durch

$$\varphi^t(z) = e^{tA} \cdot z \qquad (e^A := \exp(A)),$$

denn

offenbar ist $\varphi^0(z) = z$ und

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(z) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\cdot z = A e^{tA}\cdot z = A\cdot \varphi^t(z),$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. (Der Fluss ist global.)

(iii) Entscheidend für die Stabilität bzw. asymptotische Stabilität ist daher die Beschränktheit bzw. die Konvergenz der glatten Funktion $u : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$u(t) = \| \exp(tA) \| .$$

<u>Lemma</u>. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\alpha \cdot \|z\|^2 \leq \mathrm{Re}\left(\langle Az, z\rangle\right) \leq \beta \cdot \|z\|^2 , \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

gilt. Dann gilt für alle $t > 0$:

$$e^{\alpha t} \leq \| e^{tA} \| \leq e^{\beta t}.$$

Hierbei ist $\langle -,- \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ das kanonische hermitesche Produkt auf $\mathbb{C}^n$,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \overline{w_j}.$$

Beweis. Es ist $z(t) = e^{tA} \cdot z$ Lösung von $\dot{z} = Az$ mit Anfang $z \in \mathbb{C}^n$. Für $u : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$u(t) = \|z(t)\|^2 = \langle z, z\rangle(t)$$

rechnen wir:

$$\dot{u} = \langle \dot{z}, z\rangle + \langle z, \dot{z}\rangle = \langle \dot{z}, z\rangle + \overline{\langle \dot{z}, z\rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle \dot{z}, z\rangle = 2\cdot \mathrm{Re}(\langle Az, z\rangle)$$

$$\leq 2\beta \cdot \|z\|^2 = 2\beta\cdot u.$$

Mit Gronwall folgt:

$$\|e^{tA}z\|^2 = \|z(t)\|^2$$
$$\leq e^{2\beta\cdot t}\cdot\|z\|^2$$

(für $t>0$ wähle zunächst $T>t$ und wende Gronwall auf $x|[0,T)$ an). Also ist

$$\|e^{tA}\| = \sup\{\|e^{tA}\cdot z\| : \|z\| = 1\} \leq e^{\beta t}.$$

Ähnlich folgt:

$$\|e^{tA}\| \geq e^{\alpha t}.$$

$\boxtimes$

Satz. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$. Dann ist $p = 0$ genau dann ein Attraktor für das lineare System $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, wenn für alle Eigenwerte $\alpha \in \mathbb{C}$ von A gilt:

$$\mathrm{Re}(\alpha) < 0.$$

Beweis. „$\Rightarrow$" ist schon geklärt.

„$\Leftarrow$": Wir zeigen:

$$\lim_{t \to \infty} \| e^{tA} \| = 0.$$

Aus der Definition von exp sieht man unmittelbar, dass für alle $S \in GL_n \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1}$$

(denn

$$\exp(SAS^{-1}) = \sum \frac{1}{n!} \underbrace{(SAS^{-1})^n} = S\left(\sum_n \frac{1}{n!} A^n\right) \cdot S^{-1}$$

$$= (\underline{S}A\cancel{S^{-1}}) \cdot (\cancel{S}A\cancel{S^{-1}}) \cdots (SA\underline{S^{-1}}) \quad \text{(n-mal}$$

$$= S \exp(A) S^{-1})$$

Wir dürfen daher A gleich in einer Normalform (in $\mathrm{Mat}_n \mathbb{C}$) annehmen (und könnten auch von vorneherein $A \in \mathrm{Mat}_n \mathbb{C}$ betrachten). Nun ist i.a. A zwar nicht diagonalisierbar, wohl aber über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar, z.B. in eine Jordansche Normalform. Wir nehmen also an, dass

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ k_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & k_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\alpha_j \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte sind ($j = 1, \dots, n$) und $k_j \in \{0,1\}$ ($j = 1, \dots, n-1$).

Trick: Nun können wir aber beliebig nah an $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ „heranskonjugieren", indem wir (bei $\varepsilon > 0$, welches wir später noch festlegen) mit

$$S = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$$

konjugieren. Dann erhalten wir nämlich

$$B := SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \varepsilon \cdot k_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon k_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \varepsilon \cdot K$$

mit der nilpotenten Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ k_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$Re(\bar{z} w) \leq |z| \cdot |w|$

Jetzt rechnen wir

$$Re(\langle Bz, z\rangle) = Re\left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j \cdot \overline{z_j} + \varepsilon \cdot \sum_{j=2}^{n} k_{j-1} \overbrace{z_{j-1} \cdot \overline{z_j}} \right\}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{Re(\alpha_j)}_{\leq \max_{i=1}^{n} Re(\alpha_i)} \cdot |z_j|^2 + \varepsilon \sum_{j=2}^{n} k_{j-1} \underbrace{|z_{j-1}|}_{\leq \|z\|} \cdot \underbrace{|z_j|}_{\leq \|z\|} \leq$$

$$\le \max_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(\alpha_j) \cdot \|z\|^2 + \varepsilon \cdot (n-1) \cdot \|z\|^2$$

$$= \beta \cdot \|z\|^2$$

mit

$$\beta := \max_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(\alpha_j) + \varepsilon \cdot (n-1)$$

Nun wählt man $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch noch $\beta < 0$ ist und es folgt dann mit dem Lemma:

$$\|e^{tA}\| \le e^{\beta t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$\blacksquare$

Kommentare. (a) Für spätere Zwecke beachte, dass $\|e^{tA}\|$, und damit alle Bahnen $\|x(t)\|$ bei $\dot{x} = Ax$ bei $\mathrm{Re}(\alpha_j) < 0$, $\forall j$, sogar exponentiell gegen $p = 0$ konvergieren.

(b) Im Fall von $\mathrm{Re}(\alpha_j) \leq 0$, $\forall j$, kann i.a. keine +-Stabilität erwarten. Betrachte dazu das einfachste Beispiel mit einem doppelten Eigenwert auf der imaginären Achse, bei dem algebraische und geometrische Vielfachheit verschieden sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $A^2 = 0$ und daher

$$\exp(tA) = \mathbb{1} + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Lös.-kurve von $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^2$ zum Anf.-wert $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird damit zu

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

also unbeschränkt! $p = 0$ ist damit nicht +-stabil, obwohl $\mathrm{Re}(\alpha_j) \leq 0$, $\forall j$, gilt.